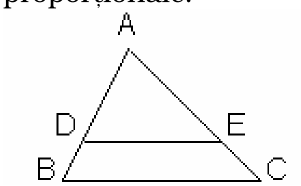
SINTEZĂ A GEOMETRIEI
de clasa a VII-a

- **Asemănarea**

1) Teorema lui Thales :

O paralelă la o latură a unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporționale.



DE || BC $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}}$, sau alte variante .

2) Reciproca teoremei lui Thales :

Dacă o dreaptă determină pe două laturi ale unui triunghi segmente proporționale, atunci ea este paralelă cu a treia latură a triunghiului.

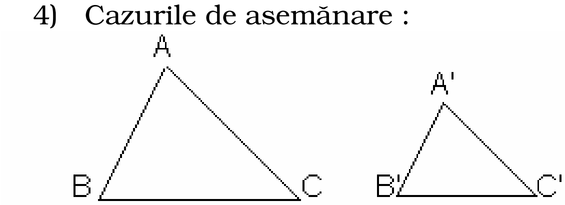
$\boxed{\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}}$ $\Rightarrow$ DE || BC.

3) Teorema fundamentală a asemănării :

O paralelă la o latură a unui triunghi formează cu celelalte două laturi un triunghi asemenea cu primul.

DE || BC $\Rightarrow$ $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ din care => în principal proporționalitatea laturilor : $\boxed{\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{BC}{DE}}$

4) Cazurile de asemănare :



Cazul I (UU) : Dacă $\angle A \equiv \angle A'$ și $\angle B \equiv \angle B'$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Cazul II (LUL) : Dacă $\angle A \equiv \angle A'$ și $\boxed{\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}}$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Cazul III (LLL) : Dacă $\boxed{\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}}$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

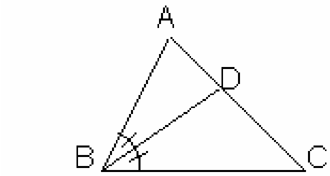
5) Raportul de asemănare a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul a două laturi corespunzătoare, sau a două înălțimi corespunzătoare, etc ...

$\boxed{\dfrac{l}{l'} = \dfrac{h}{h'} = \dfrac{m}{m'} = \dfrac{P}{P'} = \ldots = k}$ unde l, l' = laturi corespunzătoare; h, h' = înălțimi corespunzătoare; m, m' = mediane corespunzătoare; P, P' = perimetre corespunzătoare, k = valoarea raportului de asemănare.

6) Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul

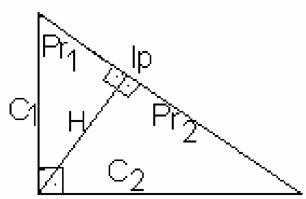
raportului de asemănare. $\dfrac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta A'B'C'}} = k^2$

7) Teorema bisectoarei : Bisectoarea unui unghi al unui triunghi determină pe latura opusa segmente proporționale cu laturile care formează unghiul (și reciproc).



$$\boxed{< ABD \equiv < DBC \Leftrightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}}$$

Relații metrice în triunghiul dreptunghic :



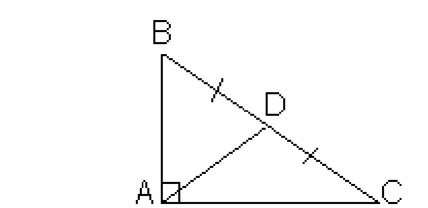
Ip = ipotenuza
C_1 = cateta 1
C_2 = cateta 2
H = inaltimea
Pr_1 = proiectia catetei 1
Pr_2 = proiectia catetei 2

1) **Teorema lui Pitagora** :
   a) pentru Ipotenuză : $Ip^2 = C_1^2 + C_2^2$.
   b) pentru Catete : $C_1^2 = Ip^2 - C_2^2$ sau $C_2^2 = Ip^2 - C_1^2$.

2) **Teorema catetei** : $C_1^2 = Ip \cdot Pr_1$ sau $C_2^2 = Ip \cdot Pr_2$.

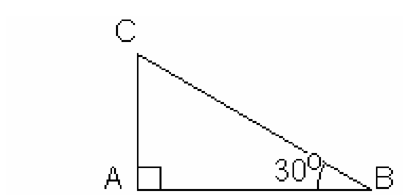
3) **Teorema înălțimii** : $H^2 = Pr_1 \cdot Pr_2$ sau $\boxed{H = \dfrac{C_1 \cdot C_2}{Ip}}$

4) **Teorema medianei** : Mediana corespunzătoare ipotenuzei (dusă din varful unghiului drept) este egală cu 1/2 din ipotenuză.



$m(<BAC) = 90^o$, $BD = DC$ => $AD = \dfrac{1}{2} \cdot BC$

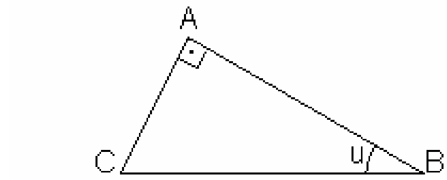
5) **Teorema unghiului de 30°** : Dacă un triunghi dreptunghic are un unghi cu masura de 30 °, atunci cateta opusă acestui unghi este egală cu 1/2 din ipotenuză.



$m(<BAC) = 90^o$, $m(<ABC) = 30^o$

=> $AC = \dfrac{1}{2} \cdot BC$

Funcții trigonometrice :



1) **Definiții :**

sin (<u°) = cateta opusă / ipotenuză ; sin (<B) = AC / BC.
cos (<u°) = cateta alăturată / ipotenuză ; cos (<B) = AB / BC.
tg (<u°) = cateta opusă / cateta alăturată; tg (<B) = AC / AB.
ctg (<u°) = cateta alăturată / cateta opusă; ctg (<B) = AB / AC.

2) Tabelul valorilor funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor uzuale :

	30 °	45 °	60 °
sin	1 / 2	√2 / 2	√3 / 2
cos	√3 / 2	√2 / 2	1 / 2
tg	√3 / 3	1	√3
ctg	√3	1	√3 / 3

Arii și perimetre :

Obs. : Două figuri geometrice care au ariile egale se numesc figuri echivalente.
Notații : A = aria ; P = perimetrul

1) **Pătratul :** $A = L^2$; $P = 4L$; unde L = latura pătratului.

2) **Dreptunghiul :** $A = L \cdot l$; $P = 2L + 2l$

unde L = lungimea și l = lațimea.

3) **Paralelogramul :** $A = B \cdot H$; sau $A = l_1 \cdot l_2 \cdot \sin u$; $P = 2(l_1 + l_2)$

unde B = baza ; H = înaltimea ; u = unghiul ascuțit al paralelogramului.

4) **Rombul:** $A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$; sau $A = L \cdot H$; sau $A = L^2 \cdot \sin u$; $P = 4L$

unde d_1, d_2 = diagonalele ; L = latura ; H = înălțimea ; u = unghi ascuțit.

5) **Trapezul :** $A = \frac{(B + b) \cdot H}{2}$; $P = B + b + l_1 + l_2$; $\frac{B + b}{2}$ = Liniamijlocie

unde B = baza mare ; b = baza mică ; H = înălțimea ; l_1, l_2 = laturile neparalele.

5) **Patrulater ortodiagonal** (*cu diagonalele perpendiculare*) :

$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$; $P = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$

7) **Patruleter convex oarecare** :

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin u}{2}$$ unde $u = m(\angle d_1, d_2)$.

8) **Triunghiul** :

a) ***dreptunghic*** : $A = \frac{C_1 \cdot C_2}{2}$; sau $A = \frac{Ip \cdot h}{2}$; $P = C_1 + C_2 + Ip$.

b) ***echilateral*** : $A = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$; $P = 3\,L$.

c) ***isoscel*** : $A = \frac{B \cdot H}{2}$; $P = B + 2\,L$

unde B = baza = latura necongruentă ; L = laturile congruente;
H = înălțimea corespunzătoare bazei (se calculează cu teorema lui Pitagora ținând cont că această înălțime este și mediană).

d) ***oarecare*** : $A = \frac{B \cdot H}{2}$; unde B = oricare latură (cunoscută) ; H = înălțimea corespunzătoare ;

$$A = \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot \sin u}{2}$$; unde u = unghiul dintre l_1 si l_2 ;

Formula lui Heron: $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

unde a, b, c = laturile, iar $p = \frac{a+b+c}{2}$ = semiperimetru.

9) **Cercul** :

$A = \pi R^2$; $L = 2\,\pi\,R$;

$S_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot n}{360}$; $L_{\text{arc de cerc}} = \frac{\pi \cdot R \cdot n}{180}$

Obs. : - Raza cercului circumscris unui triunghi se află cu formula :

$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot A}$; sau $R = \frac{a}{2 \cdot \sin A}$

- Raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este egală cu 1/2 din ipotenuză (centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei).
- Raza cercului circumscris unui triunghi echilateral se află cu

formula : R = $\frac{2}{3} \cdot H$, iar raza cercului înscris cu formula :

r = $\frac{1}{3} \cdot H$; (Centrul cercului circumscris coincide cu centrul cercului încris, cu ortocentrul și cu centrul de grutate al triunghiului.)

- Raza cercului înscris într-un triunghi oarecare se află cu

formula : $\boxed{r = \frac{2 \cdot A}{P}}$ unde A = aria triunghiului și P = perimetrul.

Poligoane regulate :

	Triunghi echilateral	Patrat	Hexagon regulat
L *(latura)*	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	R
a *(apotema)* (a = r)	$\frac{R}{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$ sau $\frac{L}{2}$	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$
S *(aria)*	$\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$	L^2	$\frac{3L^2\sqrt{3}}{2}$
Alte formule	H = $\frac{L\sqrt{3}}{2}$ R = $\frac{2}{3} \cdot H_3$; r = $\frac{1}{3} \cdot H_3$	d = $L\sqrt{2}$	D = 2 L d = $L\sqrt{3}$

Obs. : Când o coardă a unui cerc corespunde unui arc de :

120° => atunci ea este egală cu $L_3 = R\sqrt{3}$;

90° => este egală cu $L_4 = R\sqrt{2}$;

60° => este egală cu $L_6 = R$.

Calcularea unei înălțimi dintr-un triunghi :

1. Înălțimea unui **triunghi echilateral** se calculează cu formula $\boxed{h = \frac{L\sqrt{3}}{2}}$ unde L = lungimea laturii triunghiului.

2. Înălțimea corespunzătoare ipotenuzei unui **triunghi dreptunghic** se calculează cu

   formula $\boxed{h = \frac{C_1 \cdot C_2}{Ip}}$, unde C_1 și C_2 sunt lungimile catetelor triunghiului, iar Ip este lungimea ipotenuzei,

   sau cu

   formula $\boxed{h^2 = Pr_1 \cdot Pr_2}$, unde Pr_1 Și Pr_2 sunt lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

3. Înălțimea corespunzătoare bazei unui **triunghi isoscel** (înălțimea principală), se calculează cu teorema lui Pitagora, ținând cont că ea este și mediană (are piciorul în mijlocul bazei).

   Formula este: $\boxed{h^2 = L^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2}$, unde L este lungimea laturilor congruente, iar B este lungimea bazei.

4. Înălțimea corespunzătoare uneia dintre laturile congruente ale unui **triungi isoscel** (înălțimea secundară):
După ce se calculează înălțimea corespunzătoare bazei (înălțimea principală),

conform indicațiilor anterioare, se aplică formula: $\boxed{L_1 \cdot h_1 = L_2 \cdot h_2}$

unde L_1 este lungimea bazei, iar h_1 este lungimea înălțimii corespunzătoare bazei, L_2 este lungimea uneia dintre laturile congruente, iar h_2 este lungimea înălțimii corespunzătoare acesteia (care trebuie aflată).

5. O înălțime dintr-un **triunghi oarecare**:
a) Dacă se cunoaște o altă înălțime, se aplică formula: $\boxed{L_1 \cdot h_1 = L_2 \cdot h_2}$,
unde h_1 este înălțimea cunoscută, L_1 este lungimea laturii corespunzătoare ei, h_2 este lungimea înălțimii de aflat, iar L_2 este lungimea laturii corespunzătoare acesteia.

b) Dacă lungimile laturilor sunt numere raționale (fără radicali), se va afla aria

triunghiului prin formula lui Heron: $\boxed{A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$,unde a, b, c

reprezintălungimile laturilor triunghiului, iar p este mărimea semiperimetrului

triunghiului. După aceea se va înlocui valoarea găsită în formula $\boxed{A = \dfrac{B \cdot h}{2}}$
din care se va obține lungimea înălțimii căutate.
(B este lungimea laturii corespunzătoare înălțimii căutate.)

c) Dacă se cunoaște măsura unui unghi al triunghiului (30°, 45°, 60°, 120°, 135°, 150°), iar înălțimea căutată este latură a unui triunghi dreptunghic din care face parte și unghiul cu măsura cunoscută ($u < 90°$), se va folosi definiția funcției trigonometrice sinus, sau tangentă. Din această definiție se va afla lungimea înălțimii căutate ca al patrulea termen al unei proporții.
(Dacă $u > 90°$, atunci se va folosi în același fel suplementul său.)

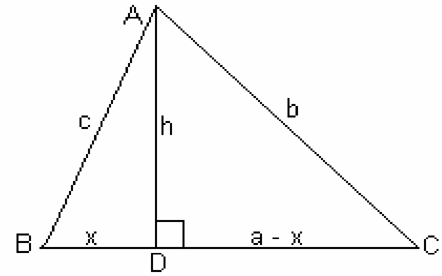
d) Dacă se cunoaște măsura unui unghi al triunghiului (30°, 45°, 60°, 120°, 135°, 150°), se va afla aria triunghiului prin formula: $\boxed{A = \dfrac{L_1 \cdot L_2 \cdot \sin u}{2}}$, unde u

este măsura unghiului cunoscut, iar L1 și L2
sunt lungimile laturilor care formează acest unghi. După aceea se va înlocui

valoarea găsită în formula $\boxed{A = \dfrac{B \cdot h}{2}}$, din care se va obține lungimea înălțimii căutate.

(B este lungimea laturii corespunzătoare înălțimii căutate.)

e) Dacă nici una din variantele anterioare nu ne convine, se va folosi



"procedeul cu x " :

Dacă BC = a ; AC = b ; AB = c și $AD \perp BC$,
Atunci notăm AD = x și ⇒ DC = a - x.
Apoi cu teorema lui Pitagora în ΔABD ⇒
$AD^2 = AB^2 - BD^2 = c^2 - x^2$, iar
Cu teorema lui Pitagora în ΔACD ⇒

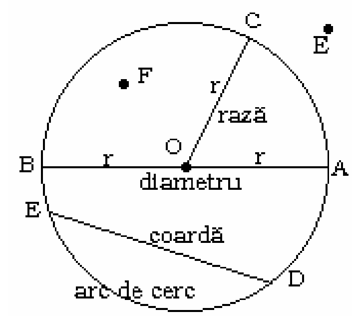
$AD^2 = AC^2 - CD^2 = b^2 - (a - x)^2$.

Egalând apoi cele două expresii ale lui AD^2 obținem ecuația : $b^2 - (a - x)^2 = c^2 - x^2$, care prin rezolvare dă lungimea segmentului BD și aplicând din nou teorema lui Pitagora în ΔABD vom obține ceea ce dorim (lungimea segmentului AD).

ATENȚIE: Cunoștințele despre aflarea lungimii unei înălțimi dintr-un triunghi sunt foarte necesare la rezolvarea problemelor referitoare la ***distanța de la un punct la o dreaptă****, atât în cadrul geometriei plane cât și în cel al geometriei în spațiu.*

CERCUL – definiții și teoreme

Se numește loc geometric, mulțimea tuturor punctelor din plan sau spațiu care satisfac o condiție dată.



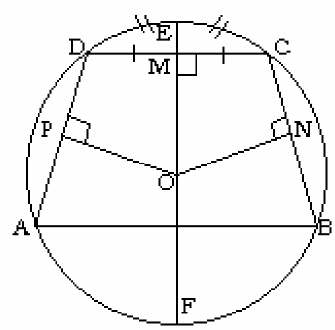
Cercul este locul geometric al punctelor din plan situate la distanța r (r > 0) față de un punct fix.

- Punctul fix se numește **centrul** cercului.
- Distanța de la centrul cercului la un punct de pe cerc se numește **raza** cercului.
- Notația **C(O; r)** reprezintă cercul cu centrul O și raza r. $C(O; r) = \{A \mid AO = r\}$.
- $\{F \mid FO < r\} = \text{Int } C(O; r)$ este **interiorul** cercului.
- $C(O; r) \cup \text{Int } C(O; r) = D(O; r)$ este **discul** cu centrul O și raza r.
- $\{E \mid EO > r\} = \text{Ext } C(O; r)$ este **exteriorul** cercului.
- **Coarda** este segmentul determinat de două puncte distincte de pe cerc. De exemplu segmentul [DE] este coardă.
- **Diametrul** este coarda care trece prin centrul cercului. Segmentul [AB] este diametru. AB = 2 r. Diametrul este cea mai mare coardă dintr-un cerc.
- **Arcul de cerc** este porțiunea dintr-un cerc cuprinsă între două puncte distincte ale cercului.

TEOREME REFERITOARE LA ARCE ȘI COARDE

1. În același cerc sau în cercuri congruente la arce congruente corespund coarde congruente și reciproc, la coarde congruente corespund arce congruente.

   $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{BC} \Leftrightarrow [AD] \equiv [BC]$.



2. Diametrul perpendicular pe o coardă împarte coarda și arcele corespunzătoare în părți congruente.
   Ipoteză: $EF = 2r$; $EF \perp DC$; $EF \cap DC = \{M\}$.

   Concluzie: $[DM] \equiv [MC]$ și $\overset{\frown}{DE} \equiv \overset{\frown}{EC}$.

3. Arcele de cerc cuprinse între două coarde paralele sunt congruente.
   Ipoteză: $AB \parallel CD$; $A, B, C, D \in C(O, r)$.

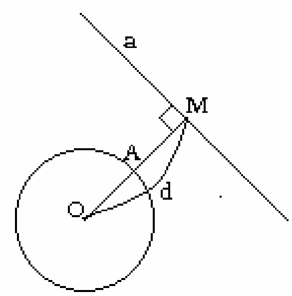
   Concluzie: $\overset{\frown}{AD} \equiv \overset{\frown}{BC}$.

4. Coardele egal depărtate de centru sunt congruente.
   Ipoteză: $OP \perp AD$; $ON \perp BC$; $[OP] \equiv [ON]$.
   Concluzie: $[AD] \equiv [BC]$.

POZIȚIILE RELATIVE ALE UNEI DREPTE FAȚĂ DE UN CERC

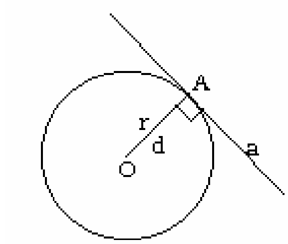
Dacă a este o drepată și C un cerc, numim **distanță** de la centrul cercului la dreaptă lungimea perpendicularei din centrul cercului pe dreaptă. $OM \perp a \Rightarrow OM = d(O; a) = d$.

1. Dacă $d > r$, dreapta a este **exterioară** cercului.



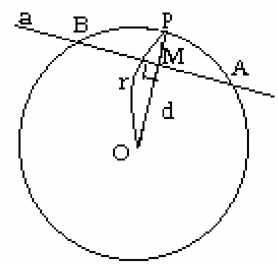
$a \cap C(O; r) = \varnothing \Leftrightarrow d > r$.

2. Dacă $d = r$, dreapta a este **tangentă** la cerc.



$a \cap C(O; r) = \{A\} \Leftrightarrow d = r$.

3. Dacă $d < r$, dreapta a este **secantă** la cerc.

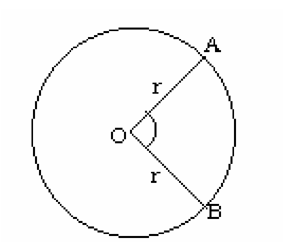


$a \cap C(O; r) = \{A; B\} \Leftrightarrow d = r$.

Consecințe:
1. O dreaptă care este tangentă la un cerc, este perpendiculară pe raza dusă la punctul de tangență.
2. Dintr-un punct exterior unui cerc se pot duce exact două tangente la acel cerc.
3. Lungimile celor două tangente duse dintr-un punct exterior la un cerc sunt egale.
4. Dacă un patrulater are toate laturile tangente la un cerc, atunci se numește **patrulater circumscris** cercului (cercul este înscris în patrulater).
5. Dacă un patrulater este circumscris unui cerc, atunci suma lungimilor laturilor sale opuse este aceeași.
6. Dacă un patrulater are suma lungimilor a două laturi opuse egală cu suma lungimilor celorlalte două laturi, atunci este un **patrulater circumscriptibil.**

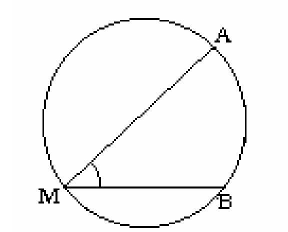
UNGHIURI RAPORTATE LA UN CERC.

1. Unghi la centru.



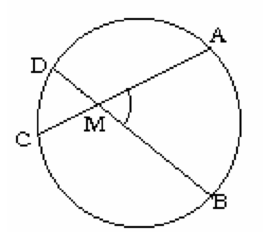
$m(\angle AOB) = m(\overset{\frown}{AB})$

2. Unghi înscris în cerc.



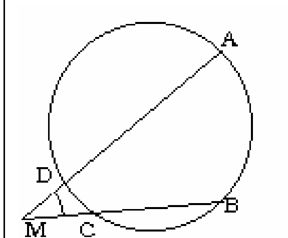
$m(\angle AMB) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{AB})$

3. Unghi cu vârful în interiorul cercului.



$m(\angle AMB) = \frac{1}{2} \cdot [m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{CD})]$

4. Unghi cu vârful în exteriorul cercului.

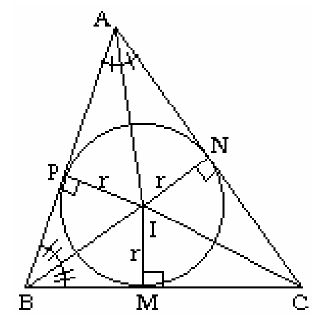


$m(\angle AMB) = \frac{1}{2} \cdot [m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{CD})]$

Consecințe:
1. Două unghiuri înscrise în același cerc și care cuprind același arc între laturile lor sunt unghiuri congruente.
2. Un unghi înscris într-un semicerc are măsura de 90^{o}.
3. Măsura unui unghi care are vârful pe un cerc și este format de o coardă și o tangentă la un cerc este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins în interiorul unghiului.
3. Un triunghi înscris într-un semicerc este dreptunghic (ipotenuza lui este diametrul cercului).
4. Patru puncte aflate pe uncerc se numesc **puncte conciclice**.

5. Dacă un patrulater are toate vârfurile pe un cerc, atunci este un **patrulater înscris în cerc**.
6. Dacă un patrulater este înscris într-un cerc, atunci vârfurile sale sunt egal depărtate de centrul cercului.
7. Dacă un patrulater este înscris într-un cerc, atunci unghiurile sale opuse sunt suplementare.
8. Dacă un patrulater este înscris într-un cerc, atunci orice unghi exterior al său este congruent cu unghiul opus interior.
9. Dacă un patrulater este înscris într-un cerc, atunci un unghi format de o diagonală cu o latură este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă.
10. Dacă un patrulater are una din proprietățile 6, 7, 8, 9, atunci este **patrulater inscriptibil** și are toate celelalte proprietăți ale patrulaterului înscris în cerc.

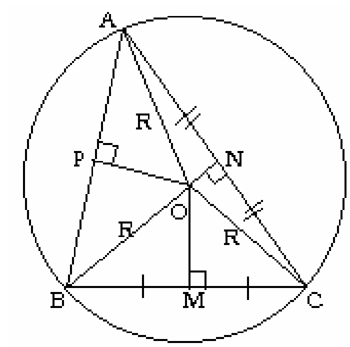
Triunghiul circumscris unui cerc are laturile tangente la acel cerc. Cercul care este tangent la laturile unui triunghi se numește **cerc înscris în triunghi,** iar centrul său I este intersecția bisectoarelor unghiurilor triunghiului.



- triunghiul ABC este triunghiul circumscris cercului C(I; r).
- C(I; r) este cercul înscris în triunghiul ABC.
- r este raza cercului înscris: IM = IN = IP = r.
- $r = \frac{2 \cdot A}{P}$, unde A este aria triunghiului ABC,

  iar P = AB + AC + BC.

Triunghiul înscris într-un cerc are vârfurile situate pe cerc, iar laturile sunt coarde ale cercului. Cercul se numește **cerc circumscris triunghiului** și centrul său O este punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor triunghiului.



- triunghiul ABC este triunghiul înscris în C(O; R).
- C(O; R) este cercul circumscris triunghiului ABC.
- R este raza cercului circumscris:

  OA = OB = OC = R. $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot A}$, unde

  a, b, c sunt lungimile laturilor, iar

  A este aria triunghiului ABC.